جزوه کمک آموزشی نکات درس:

گسسته

فصل دوم

مقطع تحصیلی:

دوره دوم متوسطه

پایه:

دوازدهم ریاضی

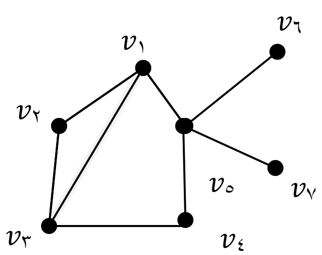
تهیه و تنظیم:

مرکز تحقیقات مهندسی ثمین

فصل دوم: گراف

معرفی گراف

با توجه به شکل روبرو گراف متشکل است از مجموعه ای از نقاط و مجموعه ای از پاره خط ها که به هر یک از این نقاط رأس و به هریک از این پاره خط ها یال می گوییم.



تذکر: توجه داشته باشید که یال ها لازم نیست که حتما پاره خط راست باشند و در هر سر یال باید یک رأس قرار گرفته باشد.

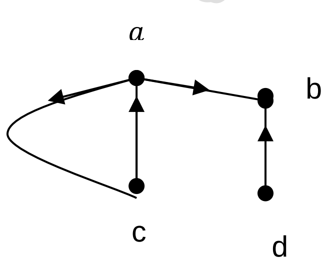
با توجه به گراف G مجموعه راس ها ویال ها به صورت زیر نمایش داده مي شود.

$V(G)=\{v_1, v_2, v_3, v_4, v_5, v_6\}$ مجموعه رأس های گراف

$E(G)=\{v_1v_2, v_2v_3, v_1v_3, v_3v_4, v_1v_5, v_5v_6, v_5v_7\}$مجموعه یال های گراف G

تعداد اعضاء مجموعه V(G)را با $|V(G)|$ نمایش داده می شود. $n(V(G)) = |V(G)|$

گراف جهت دار: به گرافی که برای یال های آن جهت تعیین شده باشد را گراف جهت دار می گوییم و برای نمایش اینکه جهت یال از سمت کدام رأس به سمت کدام رأس است یال ها را زوج مرتب نمایش می دهیم.



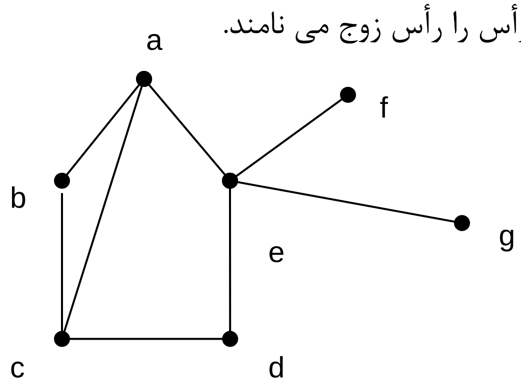
مثال: $V = \{a, b, c, d\}$ و $E = \{(a,c)و(c,a)و(a,b)و(d,b)\}$

مرتبه گراف : تعداد رأس های گراف G را مرتبه گراف G می گویند و آن را با P نشان می دهند و تعداد یال های گراف را اندازه گراف گویند و با q نشان می دهند.

$$q(G)= |E(G)| \text{ و } P(G) = |V(G)|$$

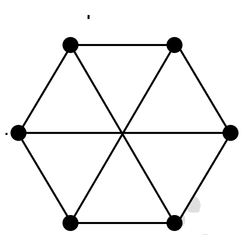
درجه یک رأس: تعداد یال هایی از گراف G که به راس v متصل اند و را با deg(v) نمایش می دهند.

اگر درجه یک رأس فرد باشد آن رأس را راس فرد و اگر زوج باشد آن رأس را رأس زوج می نامند.



مثال: $\deg e = ۴$ $\quad$ $\deg a = ۳$

گرافk – منتظم : گرافی که درجه تمام راس های آن با هم مساوی و برابر با عدد k باشند ، گراف k- منتظم می نامیم.



گراف ۳- منتظم $\quad$ q=۹ , p=٦

گراف تهی : گرافی که تمام رأس های آن رأس تنها باشند یعنی هیچ یالی نداشته باشد را گراف تهی گویند و گراف تهی n رأسی، گراف شامل n رأس تنها و بدون یال است.

طوقه: در یک گراف ممکن است یک یال یک رأس را به خود آن رأس وصل کند که آن یال را طوقه می نامند.

گراف ساده: گرافی که در آن طوقه نباشد و بین دو رأس از گراف بیش از یک یال وجود نداشته باشد را گراف ساده گویند.

دو رأس مجاور : هرگاه دو رأس توسط یالی بهم متصل شده باشند را دو رأس مجاور یا همسایه گویند.

توجه : در رسم گراف توجه داشته باشید که هیچ یالی خودش را قطع نکند و همچنین هیچ یالی نباید از روی رأسی که مربوط به دو سر آن یال نیست عبور کند.

مجموعه همسایه های یک رأس: فرض کنید $v \in V(G)$ به مجموعه رأس های گراف G که به رأس v متصل اند " همسایگی باز رأسv" می گوییم و با $N_{G(v)}$ نمایش می دهیم.

ازاضافه کردن خود راس v به مجموعه $N_{G(v)}$ "همسایگی بسته رأس v "بدست می آید و با $\mathrm{N}_{\mathrm{G}(\mathrm{v})}$ نمایش داده می شود.

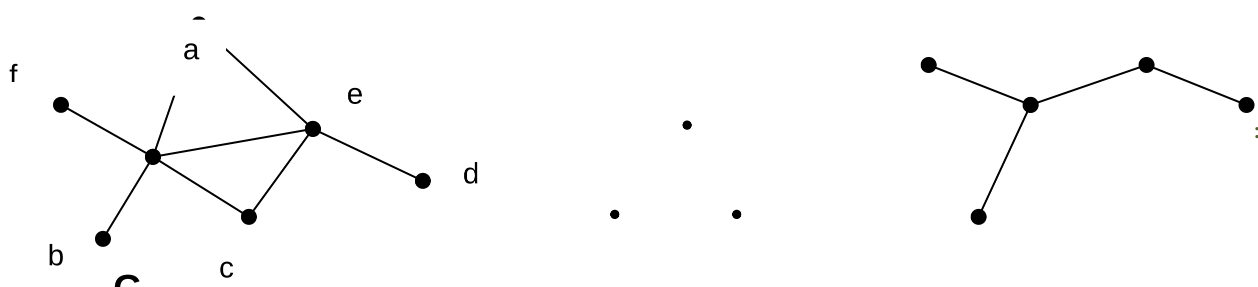
دو یال مجاور: دو یال را مجاور گویند هر گاه رأسی وجود داشته باشد که هر دوی آنها به آن متصل باشند.

بزرگ ترین و کوچکترین درجه گراف:

بزرگ ترین عدد در بین درجات رأسها را $\Delta_{(G)}$ و کوچکترین آنها را $\delta_{(G)}$ نمایش میدهیم.

زیر گراف : یک زیر گراف از گراف G گرافی است که مجموعه رأس های آن زیر مجموعه ای از مجموعه رأس های G باشد و مجموعه یال های آن زیرمجموعه ای از مجموعه یالهای گراف G باشد.

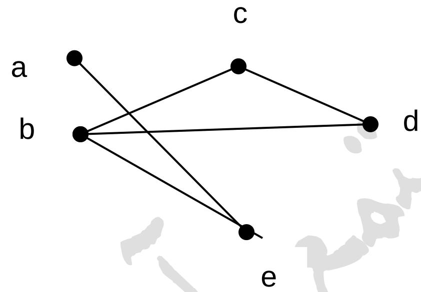
مثال:

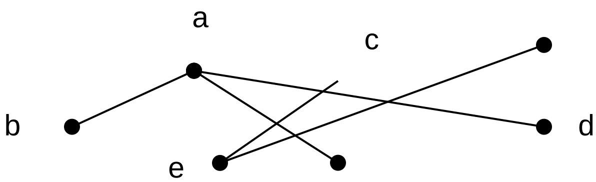


زیر گراف های گرافG

مکمل گراف: گرافی که مجموعه رأس های آن همان مجموعه رأس های گراف G است و بین دو رأس از گراف مکمل یک یال است اگر و تنها اگر بین همان دو رأس در G یالی وجود نداشته باشد. گراف مکمل را با $\overline{G}$ نمایش میدهند.

مثال:





گراف کامل: گرافی را که هر رأس آن با تمام رأس های دیگر مجاور باشد را گراف کامل می نامیم. گراف کامل n رأسی را با K_n نمایش می دهیم و می توان آن را یک گراف n-۱-منتظم گفت.

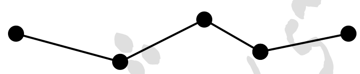
مسیر: اگر u وv دو رأس از گراف G باشد یک مسیر از u به v در G دنباله ای از رأس های دو به دو متمایز در G است که از u شروع و به v ختم میشود به طوری که هر دو رأس متوالی این دنباله در G مجاور هم باشند.

نکته: طول یک مسیر برابر است با تعداد یال های موجود در آن مسیر

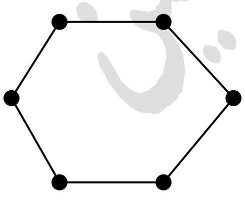
نکته: دنباله متشکل از تنها یک رأس v با طول صفر از رأسv به خودش، یک مسیر است.

گرافی که تنها از یک مسیر n رأسی تشکیل شده باشد با P_n نمایش می دهیم.

مثال:P_5



دور: دنباله ای از رأس ها ی دو به دو متمایز که در آن هر رأس با رأس بعدی مجاور است را یک دور به طول n می نامیم



گرافی را که تنها از یک دور n رأسی تشکیل شده باشد را با C_n نمایش می دهیم .

همبندی و نا همبندی یک گراف:

گراف Gرا همبند می نامیم هرگاه بین هر دو رأس آن حداقل یک مسیر وجود داشته باشد در غیر اینصورت ناهمبند می نامند .

در گراف همبند دوری وجود دارد که از همه رأس ها میگذرد.

قضیه: اگر G یک گراف با مرتبه p و اندازه q و $V = \{v_۱, \dots \dots v_p\}$ مجموعه راس های آن باشد آنگاه

$$\sum_{i=۱}^{p} \deg v_i = ۲q$$

نتیجه: تعداد رأس های فرد هر گراف، عددی زوج است.

اثبات: فرض کنیم G یک گراف و A مجموعه همه راس های فرد گراف G و B مجموعه همه راس های زوج گراف Gباشد.

$$\sum_{v \in V(G)} \deg(v) = \sum_{v \in A} \deg(v) + \sum_{v \in B} \deg(v)$$

از طرفی $\sum_{v \in A} \deg(v)$ و $\sum_{v \in V} \deg(v)$ هر دو زوج اند پس $n_{(A)}$ عددی زوج است

نکته: در گراف ساده از مرتبه p و اندازه q میانگین درجه ها بین δ و Δ می باشد.

$$\delta \le \frac{۲q}{p} \le \Delta$$

تذکر: مجموع تعداد یال های گراف G و $\bar{G}$ از مرتبه P برابر تعداد یال های گراف کامل K_P است.

$$q(G) + q(\bar{G}) = \binom{P}{۲} = \frac{p(p-۱)}{۲}$$

تذکر: مجموع درجه رأس در گراف G , $\bar{G}$ از مرتبه P برابر P-1 است .

$$\deg(v_i)_G + \deg(v_i)_{\bar{G}} = P - ۱$$

نکته: هر گراف K_P همبند است .

نکته: هر گراف که $q < p - 1$ قطعا ناهمبند است.

نکته: تعداد یال های گراف n راسی ، k-منتظم $\frac{nk}{2}$ است.

نکته: اگر G یک گراف n راسی کامل باشد تعداد یال های آن $\binom{n}{2}$ است.

مثال:درجه راس a در هردو گراف $G,\bar{G}$ برابر ۳ است. اگر گراف G دارای ۱۰ یال باشد. تعداد یال های گراف $\bar{G}$ را بیابید.

پاسخ

$$d_G(a)+d_{\bar{G}}(a)=p-۱ \Rightarrow ۳+۳=p-۱ \Rightarrow p=۷$$

پس گراف ۷ راس دارد لذا تعداد یال های یک گراف کامل ۷ رأسی $۲۱=\frac{۷\times۶}{۲}$ حال با توجه به:

$$q(G)+q(\bar{G})=q(k_p) \Rightarrow ۱۰+q(\bar{G})=۲۱ \Rightarrow q(\bar{G})=۱۱$$

مدل سازی با گراف

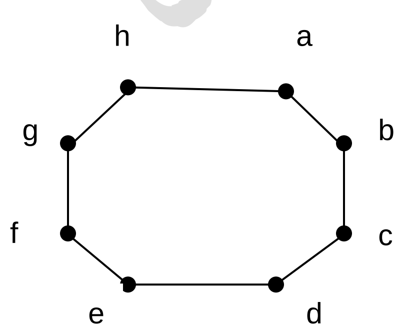
مجموعه احاطه گر: زیرمجموعه D از مجموعه رأس های گراف G را مجموعه احاطه گر می نامیم هرگاه هر رأس از گراف یا در D باشد و یا حداقل با یکی از راس های D مجاور باشد. به عبارتی هرگاه هر رأسی از گراف که در D نباشد، دست کم به یکی از رأس های عضو D وصل باشد.

مجموعه ای را که کمترین تعداد عضو را داشته باشد مجموعه احاطه گر مینیمم آن گراف است و تعداد اعضاء چنین مجموعه ای را عدد احاطه گری گراف G می نامیم. و آن را با $\gamma(G)$ نمایش می دهیم.

نکته: یک مجموعه احاطه گر را که با حذف هر یک از رأس هایش دیگر احاطه گر نباشد احاطه گر مینیمال می نامیم. دقت کنید هر مجموعه احاطه گر مینیمال می تواند مینیمم نباشد اما برعکس،هر مجموعه احاطه گر مینیمم قطعا مینیمال است.

مثال: دو مجموعه$\{b,d,f,h\}$ و $\{a,e,c,g\}$ احاطه گری مینیمال هستند

$$\gamma(G)=۴$$



جزء صحیح :

$$\lfloor x\rfloor = \begin{cases} x & x \in \mathbb{Z} \\ \text{بزرگترین عدد صحیح کوچکتر از } x & x \notin \mathbb{Z} \end{cases}$$

سقف X:

$$\lceil x\rceil = \begin{cases} x & x \in \mathbb{Z} \\ \text{کوچکترین عدد صحیح بزرگتر از } x & x \notin \mathbb{Z} \end{cases}$$

کران پایین $\gamma_{(G)}$

اگر G یک گراف رأسی با ماکسیمم درجه Δ و D یک مجموعه احاطه گر در آن باشد آنگاه :

$$\left\lceil \frac{n}{\Delta + ۱} \right\rceil \le |D| \quad \Rightarrow \quad \left\lceil \frac{n}{\Delta + ۱} \right\rceil \le \gamma(G)$$

مثال: عدد احاطه گری $P_۷$ رابیابید

پاسخ: با توجه به اینکه در گراف $P_۷$ ، ۲ =Δ است داریم $\gamma(G) \ge \left\lceil \frac{۷}{۳} \right\rceil \Rightarrow \gamma(G) \ge ۳$

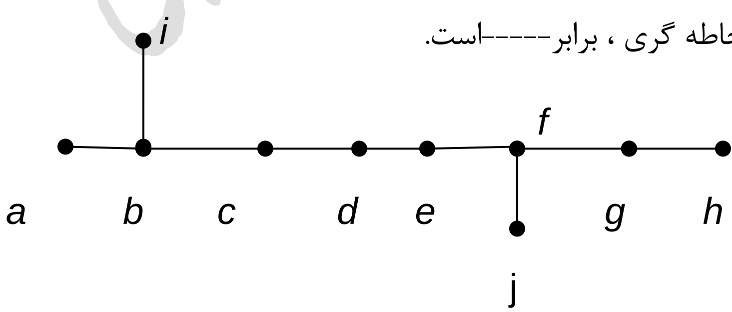
نکته: در گراف P_n, C_n عدد احاطه گری برابر است با $\left\lceil \frac{n}{۳} \right\rceil$

نکته: اگر در گرافی n راسی، $\gamma(G) = ۱$ باشد، گراف دست کم (n-۱) یال دارد

نکته: اگر $\gamma(G) = ۱$ باشد، حداکثر تعداد یال ها وقتی بدست می آید که گراف کامل باشد، حداکثر یال ها برابر $\frac{n(n-۱)}{۲}$ می شود.

مثال: در گراف روبرو $\left\lceil \frac{n}{\Delta+۱} \right\rceil$ برابر-----و عدد احاطه گری ، برابر-----است.

پاسخ:



گراف ۱۰ رأس دارد و $\Delta = ۳$ حاصل $\left\lceil \frac{n}{\Delta+۱} \right\rceil = \left\lceil \frac{۱۰}{۴} \right\rceil = ۳$

از بین a و b و i حداقل یکی باید انتخاب شود بهتر است b باشد.

از بین f و j هم حداقل یکی باید انتخاب شود که بهتر است f باشد.

برای اینکه همه رأس های دیگر احاطه شوند باید حداقل دو رأس d و g را نیز اضافه کنیم پس $\gamma_{(G)} = ۴$